

**UNIVERSIDAD DEL CEMA
Buenos Aires
Argentina**

Serie
DOCUMENTOS DE TRABAJO

Área: Ingeniería

**APLICACIÓN DE LAS ECUACIONES
DIFERENCIALES CON RETARDO**

Gabriel Pérez Lance

**Marzo 2021
Nro. 781**

**www.cema.edu.ar/publicaciones/doc_trabajo.html
UCEMA: Av. Córdoba 374, C1054AAP Buenos Aires, Argentina
ISSN 1668-4575 (impreso), ISSN 1668-4583 (en línea)
Editor: Jorge M. Streb; asistente editorial: Valeria Dowding jae@cema.edu.ar**

Aplicación de las ecuaciones diferenciales con retardo

Gabriel Pérez Lance ¹

Resumen

Existen innumerables situaciones en las que la modelización de problemas de ingeniería, economía, física, química, logística y ciencias en general, conduce al planteo de una ecuación diferencial, o bien a un sistema de ecuaciones diferenciales. De hecho es un tema ampliamente estudiado y se lo ha enmarcado en diferentes esquemas y tipos de ecuaciones diferenciales de acuerdo con la estructura, el orden y si involucran derivadas parciales o totales. En los sistemas lineales es habitual el estudio de los autovalores asociados a dicho sistema, para entender su comportamiento y caracterizar la estabilidad del mismo.

En ingeniería a menudo se trabaja con lo que se denomina "sistemas realimentados", esto es, sistemas en donde una determinada variable es monitoreada mediante un sensor, y a partir del valor obtenido, una parte del sistema aplica la información correspondiente a este valor, para ajustar la variable que se desea controlar. Todo este proceso se modeliza mediante ecuaciones integro-diferenciales, pues las magnitudes involucradas se relacionan entre sí - debido a los modelos que se suelen utilizar - a través de derivadas temporales de distinto orden. Existe toda un área de la ingeniería denominada "Control Automático" y "Control Robusto", orientada a estudiar estos problemas, y es muy común encararlos - cuando se trata de sistemas lineales - mediante transformada de Laplace (para el caso continuo), o transformada Zeta (en el caso discreto).

Es interesante ahora reflexionar en el siguiente aspecto: una variable puede ser tal que, para determinado modelo, su derivada influya sobre otra variable; pero la cuestión es que, en el mundo real, suele ocurrir que además esto no ocurre de manera instantánea, sino que el impacto de esta relación tiene lugar un cierto tiempo después. Es decir, el sensor toma en el momento t_0 el valor de la variable x , y esta variable $x(t_0)$ tal vez se relaciona con otra variable $y(t)$ o quizás con la derivada temporal de $x(t)$ pero en un momento $t + \delta_t$. Dependiendo del ámbito de aplicación podría ocurrir que el delay se deba al tiempo que le toma a un mercado en "reaccionar" frente a un cierto cambio, o bien al tiempo que le toma a un microorganismo estar en condiciones de ejercer su influencia en un determinado ser vivo, y así en muchos otros casos.

Lo que debería quedar claro es que el caso más general es justamente aquel donde lo más habitual es que exista un retardo, y no el caso en que las interacciones pudieran ser instantáneas.

1. Introducción

Si concibiéramos un problema como alguno de los mencionados anteriormente, planteado con un modelo que no tuviera en cuenta la existencia de ningún *delay* entonces escribiríamos por ejemplo:

¹Los puntos de vista expresados en esta publicación son los del autor y no necesariamente los de la Universidad del CEMA.

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t, x(t)) \quad (1)$$

pero si ahora consideramos que un modelo más realista, debería ser aquel que tenga en cuenta la existencia de retardos, entonces deberíamos escribir

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t, x(t - \tau)) \quad (2)$$

donde estamos reflejando que la derivada en determinado momento depende de la variable en cierto momento anterior.

Se podría entonces pensar en un enfoque más abarcativo y plantear el caso de un sistema descrito por

$$G(x'(t), x'(t - \tau), x(t), x(t - \tau)) = 0 \quad (3)$$

o incluso podría tener diferentes retardos, o ser cada uno de ellos una función de t , y además podría ser de orden n :

$$G[x^{(n)}(t), \dots, x''(t), x'(t), x(t), x^{(n)}(t - \tau_n(t)), \dots, x''(t - \tau_2(t)), x'(t - \tau_1(t)), x(t - \tau_0(t))] = 0 \quad (4)$$

La ecuación anterior podría ser escalar, pero en un caso más general aún, podría ser de tipo matricial o vectorial, en cuyo caso tendríamos un sistema de ecuaciones diferenciales con retardo, que describirían el problema en cuestión.

2. Desarrollo

Consideremos la ecuación diferencial con retardo (EDR)

$$x'(t) = ax(t) + bx(t - \tau) \quad (5)$$

donde a , b y τ son constantes escalares reales.

Dado que se trata de una ecuación diferencial (con retardo) que es lineal y con coeficientes constantes, podemos proceder de manera similar al enfoque que se utiliza para las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) del tipo Euler. Es decir, vamos a suponer que una solución es de la forma

$$x(t) = e^{r \cdot t} \quad (6)$$

en donde $r \in \mathbb{C}$.

Entonces reemplazando (6) en (5), se obtiene

$$re^{r.t} = ae^{r.t} + be^{r.t}e^{-\tau.r} \quad (7)$$

y puesto que la expresión (7) se verifica para todo t , entonces necesariamente debe ocurrir que:

$$r = a + be^{-\tau.r} \quad (8)$$

La ecuación (8) es la ecuación característica asociada a la EDR, y es una ecuación trascendente en variable compleja. Considerando que $r = \alpha + i.\beta$, entonces podemos escribir:

$$\alpha + i.\beta = a + b.e^{-\tau.(\alpha+i.\beta)}$$

esto implica

$$\alpha + i.\beta = a + b.e^{-\tau.\alpha}e^{-i.\tau.\beta}$$

y aplicando la relación de Euler: $e^{i.\psi} = \cos(\psi) + i.\sin(\psi)$, entonces:

$$\alpha + i.\beta = a + b.e^{-\tau.\alpha}[\cos(-\tau.\beta) + i.\sin(-\tau.\beta)]$$

Si se toma la parte real y la parte imaginaria en ambos miembros de la ecuación anterior, se obtiene:

$$\alpha = a + b.e^{-\tau.\alpha}\cos(-\tau.\beta)$$

$$\beta = b.e^{-\tau.\alpha}\sin(-\tau.\beta)$$

entonces:

$$\begin{cases} \alpha = a + b.e^{-\tau.\alpha}\cos(\tau.\beta) \\ \beta = -b.e^{-\tau.\alpha}\sin(\tau.\beta) \end{cases} \quad (9)$$

El sistema de ecuaciones trascendentes (9) tiene infinitas soluciones, pues si en la ecuación (8) hacemos el cambio de variable $z = \frac{1}{r-a}$, entonces

$$1 = z.be^{-\tau/z}e^{-\tau.a}$$

y si $be^{-\tau \cdot a} = \eta$, surge que:

$$ze^{-\tau/z} = \frac{1}{\eta}$$

donde η es distinto de cero, dado que b no es nulo porque sino no se trataría de una ecuación diferencial con retardo.

La función $f(z) = ze^{-\tau/z}$ es una función analítica con una singularidad esencial en $z = 0$, por lo tanto, por el teorema de Picard, en cualquier vecinal de $z = 0$, la función alcanza todo el plano complejo con a lo sumo una excepción. Esto implica que existe una cantidad infinita numerable de valores complejos z_n que verifican $f(z_n) = \frac{1}{\eta}$.

De este modo, hay infinitas soluciones (autofunciones) de la ecuación diferencial (5), de la forma:

$$x_n(t) = e^{r_n \cdot t} \tag{10}$$

con $r_n = a + \frac{1}{z_n}$.

Además, debido a la linealidad de la ecuación (5), entonces también será solución cualquier combinación lineal de las autofunciones $x_n(t)$.

En contraposición a las ecuaciones diferenciales ordinarias, las ecuaciones diferenciales con retardo tienen asociado un espacio de soluciones de dimensión infinita. Esto se relaciona con otro rasgo distintivo de las ecuaciones diferenciales con retardo, con respecto a las ecuaciones diferenciales ordinarias, y es que la condición inicial que requieren, es el valor de la función en todo un intervalo, y no sólo en un punto.

Dado que trataremos exclusivamente el caso de sistemas causales, entonces por (5)

$$x'(t) - ax(t) = bx(t - \tau) \quad \forall t \geq -\tau$$

por lo tanto $\forall t \in [0; \tau]$:

$$x'(t) - ax(t) = bx(t - \tau)$$

Dada la condición inicial: $x(t) = \phi(t) \quad \forall t \in [-\tau; 0]$, implica

$$x'(t) - ax(t) = b \phi(t - \tau) \quad \forall t \in [0; \tau] \tag{11}$$

Puesto que $\phi(t)$ es conocida $\forall t \in [-\tau; 0]$, entonces en el intervalo $[0; \tau]$ la solución de la EDR (5) va a coincidir con la solución de la EDO (11).

Luego, se puede obtener la solución de la EDR correspondiente al intervalo $[\tau; 2\tau]$ tomando como condición inicial el valor obtenido para $x(t)$ en el intervalo $[0; \tau]$.

Procediendo de este modo de manera recursiva, es posible determinar la solución de la EDR (5) $\forall t \geq -\tau$. Este procedimiento se conoce como *método de pasos*.

3. Aplicación de las EDR: Caso práctico I

Consideremos la EDR:

$$x'(t) = ax(t) + b x(t - \tau) \quad \forall t \geq -\tau, \text{ con } x(t) = \phi(t) \quad \forall t \in [-\tau; 0] \quad (12)$$

Sean $a = -2, b = \frac{1}{3}, \tau = c = 1$ y la función historia $\phi(t) = 1$ en $[-1; 0]$

por lo tanto la EDR a resolver es:

$$x'(t) = -2x(t) + \frac{1}{3} x(t - 1) \quad \forall t \geq -1, \text{ con } x(t) = 1 \quad \forall t \in [-1; 0] \quad (13)$$

entonces, para obtener la solución correspondiente a $t \in [0; 1]$, debemos resolver entonces:

$$x'(t) = -2x(t) + 1$$

Se trata de una EDO lineal, a coeficientes constantes tipo Euler, con autovalor igual a -2. Obtenemos la solución de la homogénea asociada y una solución particular (por el método de determinación de parámetros), y así la solución es:

$$x(t) = \frac{5}{6}e^{-2t} + \frac{1}{6} \quad \forall t \in [0; 1] \quad (14)$$

Luego repetimos el procedimiento para $t \in [1; 2]$. En este caso hay que resolver:

$$x'(t) = -2x(t) + \frac{5}{6}e^{-2(t-1)} + \frac{1}{6}$$

y se trata nuevamente de una EDO tipo Euler, cuya solución es:

$$x(t) = \left(-\frac{5}{36}e^2 + \frac{5}{6}\right)e^{-2t} + \frac{1}{36} + \frac{5}{18}e^2 t e^{-2t} \quad \forall t \in [1; 2] \quad (15)$$

Aplicando nuevamente, de manera análoga, el método para el siguiente tramo, se obtiene:

$$x(t) = -\frac{5}{216}(-5e^4 + 6e^2 - 36e^{-2t}) + \frac{1}{216} + \left(-\frac{5}{36}e^4 + \frac{5}{18}e^2\right)te^{-2t} + \frac{5}{108}e^4 t^2 e^{-2t} \quad \forall t \in [2; 3] \quad (16)$$

y de este modo se podría proceder para los siguientes intervalos, y tener toda la respuesta temporal de $x(t)$.

Se muestra en el siguiente gráfico, la solución de la EDR (13) obtenida mediante los diferentes tramos según las ecuaciones (14), (15) y (16) por el método de pasos:

```
> x_pasos := (t) -> piecewise (t < 0, c, t >= 0 and t <= tau, x1(t), t >= tau and
  t <= 2*tau, x2(t), t >= 2*tau and t <= 3*tau, x3(t));
x_pasos :=
  t -> piecewise (t < 0, c, 0 <= t and t <= tau, x1(t), tau <= t and t <= 2 tau, x2(t), 2 tau <= t and t <= 3 tau, x3(t))
> plot (x_pasos (t), t = -tau..3*tau);
```

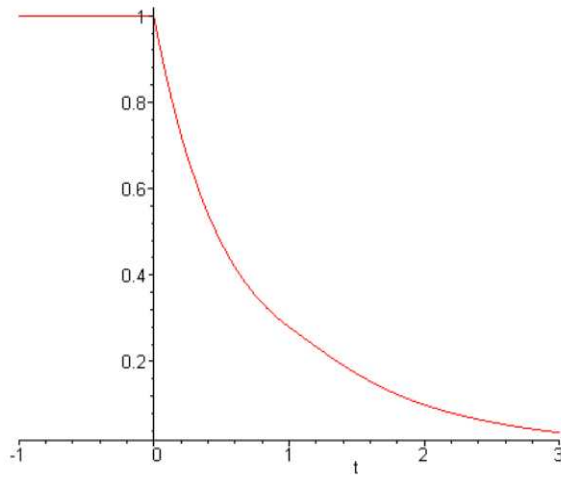


Figura 1: $x(t)$ correspondiente a la EDR (13) obtenida por el método de pasos

Otro modo de abordar el tema, sería buscar la respuesta temporal del sistema, mediante las autofunciones (10) de la ecuación característica (8) mencionada anteriormente.

Para el caso del ejemplo dado, la ecuación característica asociada a la EDR (13) resulta:

$$r = -2 + \frac{1}{3}e^{-r} \quad (17)$$

y recordando que $r = \alpha + i\beta$, entonces se obtiene según lo visto anteriormente:

$$\begin{cases} \alpha = -2 + \frac{1}{3}e^{-\alpha} \cos(\beta) \\ \beta = -\frac{1}{3}e^{-\alpha} \sin(\beta) \end{cases} \quad (18)$$

El gráfico a continuación, muestra el lugar geométrico en el plano complejo, de los puntos que verifican las ecuaciones anteriores y los puntos de intersección (soluciones) del sistema:


```

with(plots) :
implicitplot({alpha=a+b*exp(-alpha*tau)*cos((beta)*tau),
beta=-b*exp(-alpha*tau)*sin((beta)*tau)},alpha=-7..3,beta=-15..15,
numpoints=4000, axes=FRAME);

```

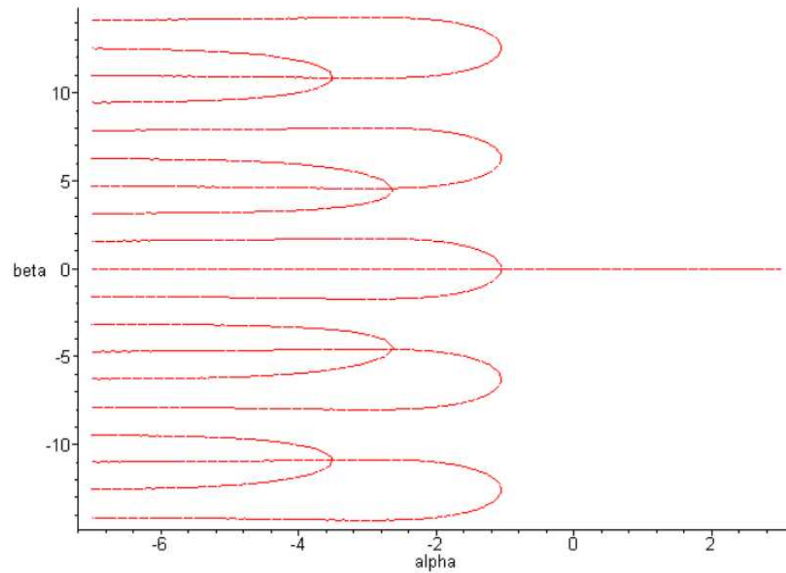


Figura 2: Lugar geométrico asociado al sistema de ecuaciones trascendentes

```

fsolve({alpha=a+b*exp(-alpha*tau)*cos(beta*tau),beta=-b*exp(-alpha*tau)*sin(beta*tau)});

```

$\{\beta = 0., \alpha = -1.048693409\}$

Figura 3: Solución numérica z_0

```

Nt:=7;
                                     Nt:=7
for i from 1 by 1 to Nt do
alpha[i]:=fsolve(-b*tau*exp(-alpha*tau)*(-sqrt(1-((alpha-a)/b*exp(alpha*tau))^2))=(2*i*Pi-arccos(
((alpha-a)/b*exp(alpha*tau)))));
beta[i]:=evalf(1/tau*(2*i*Pi-arccos((alpha[i]-a)/b*exp(alpha[i]*tau)))); end do;
alpha_1 = -2.628754231
beta_1 = 4.575836612
alpha_2 = -3.492964474
beta_2 = 10.85894381
alpha_3 = -3.947926773
beta_3 = 17.16576553
alpha_4 = -4.258775551
beta_4 = 23.46598311
alpha_5 = -4.495329916
beta_5 = 29.76148158
alpha_6 = -4.686396736
beta_6 = 36.05394247
alpha_7 = -4.846702537
beta_7 = 42.34437443

```

Figura 4: Algnas soluciones numéricas alpha y beta

```

alpha[0]:=-1.048693409:beta[0]:=0:
z[0]:=alpha[0]+beta[0]*I;
z_0 := -1.048693409
for i from 1 by 1 to Nt do z[i]:=alpha[i]+I*beta[i] end do;
z_1 := -2.628754231 + 4.575836612 I
z_2 := -3.492964474 + 10.85894381 I
z_3 := -3.947926773 + 17.16576553 I
z_4 := -4.258775551 + 23.46598311 I
z_5 := -4.495329916 + 29.76148158 I
z_6 := -4.686396736 + 36.05394247 I
z_7 := -4.846702537 + 42.34437443 I

```

Figura 5: Algunos autovalores de la ecuación característica

Los autovalores z_n hallados permiten construir soluciones de la EDR (13). Dado que el espacio solución de la EDR es de dimensión infinita, sólo vamos a considerar $N + 1$ autofunciones, ya que como la parte real de los autovalores es negativa y aumenta en módulo, entonces para valores de t positivos, tendremos exponenciales negativas y no habrá demasiado error al truncar el número de autofunciones a utilizar.

Entonces tomaremos como aproximación de la respuesta temporal - es decir la solución de la EDR (13) -, la siguiente combinación lineal de autofunciones:

$$x(t) = \sum_{i=0}^N d_i e^{\alpha_i t} \cos(\beta_i t) \quad (19)$$

donde hemos considerado sólo la parte real de las autofunciones, puesto que la solución de la EDR es real y los escalares de la combinación lineal también son reales.

Debido a la restricción impuesta por la función historia, en el caso práctico bajo estudio debería ocurrir que para los valores de t entre -1 y 0, $x(t)$ fuera igual a 1.

Esto implica que:

$$x(t) = \sum_{i=0}^N d_i e^{\alpha_i t} \cos(\beta_i t) = 1 \quad \forall t \in [-1; 0] \quad (20)$$

Dado que tenemos una cantidad finita de autofunciones, no es posible encontrar escalares d_i para que se pueda verificar la identidad anterior en todo el intervalo, pero sí podemos elegir los escalares d_i , para que en determinados valores de t la expresión se cumpla.

Esto, justamente refleja el hecho de que vamos a obtener una aproximación a la verdadera solución, por haber tomado una cantidad finita de autofunciones.

Entonces, dividimos el intervalo $[-1; 0]$ en N partes iguales, y así tendremos un conjunto de valores de t equiespaciados (con $N = 7$):

$$t_0 = -1, t_1 = -6/7, t_2 = -5/7, \dots, t_7 = 0$$

De este modo, reemplazando cada uno de estos valores t_i en la ecuación (20) obtendremos el sistema de ecuaciones descrito por:

$$\sum_{j=0}^N d_j e^{\alpha_j t_i} \cos(\beta_j t_i) = 1 \quad \forall i = 0..N \quad (21)$$

```
for nt from 0 by 1 to Nt do t[nt]:=-tau+tau/(Nt)*(nt) end do;
```

$$t_0 := -1$$

$$t_1 := \frac{-6}{7}$$

$$t_2 := \frac{-5}{7}$$

$$t_3 := \frac{-4}{7}$$

$$t_4 := \frac{-3}{7}$$

$$t_5 := \frac{-2}{7}$$

$$t_6 := \frac{-1}{7}$$

$$t_7 := 0$$

Figura 6: Vector de tiempos

Ahora se construye la matriz Afi con los coeficientes del sistema de ecuaciones y la matriz Bfi correspondiente a los términos independientes:

```
> for i from 0 by 1 to Nt do for j from 0 by 1 to Nt do Afi[i+1,j+1]:=Re(exp(z[j]*t[i])) end do end do;
> evalm(Afi);
```

2.853919775	-1.886262678	-4.478893278	-5.843780524	-6.776326456	-7.485989610	-8.059189478	-8.540106384
2.456850057	-6.762996572	-19.82802269	-16.06916126	11.61870974	43.82856196	48.39371536	10.58128473
2.115025186	-6.485785421	1.181091763	16.00115905	-10.35967995	-18.43345818	23.13689617	12.43905318
1.820758872	-3.882317912	7.336990751	-8.848520635	7.585388439	-3.508391385	-2.633003787	9.459941538
1.567434227	-1.173737438	-2.614898351	2.590123293	-5.005395215	6.744235010	-7.208434402	6.094656969
1.349354984	.5518133442	-2.710756376	.5898785267	3.080996347	-2.184175001	-2.441525095	3.564498900
1.161617400	1.155656816	.03214642583	-1.356334263	-1.796849857	-.8450598977	.8287305729	1.944018354
1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.

Figura 7: Matriz de los coeficientes del sistema de ecuaciones asociado a la condición inicial

Resolviendo el sistema

$$Afi.C = Bfi$$

se obtiene la matriz C con los escalares d_i que permiten implementar la respuesta temporal $x(t)$.

```
Bfi:=Matrix(Nt+1,1):  
for i from 0 by 1 to Nt do Bfi[i+1,1]:=1 end do:  
evalm(Bfi);
```

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
C:=evalm(inverse(Afi)&*Bfi);
```

$$C := \begin{bmatrix} .7193698650 \\ .1604770805 \\ .0428146742 \\ .0212484821 \\ .01441514996 \\ .01228620526 \\ .01299458852 \\ .0163939544 \end{bmatrix}$$

Figura 8: Matriz de términos independientes y matriz de escalares solución del sistema para las condiciones inicial

```
x := (t) -> sum(C[i+1,1]*exp(alpha[i]*t)*cos(beta[i]*t), i=0..Nt);
```

$$x := t \rightarrow \sum_{i=0}^{Nt} C_{i+1,1} e^{(\alpha_i t)} \cos(\beta_i t)$$

```
plot({x_pasos(t), x(t)}, t=-tau..3*tau, y=-1..2, numpoints=2000, color=[red, blue]);
```

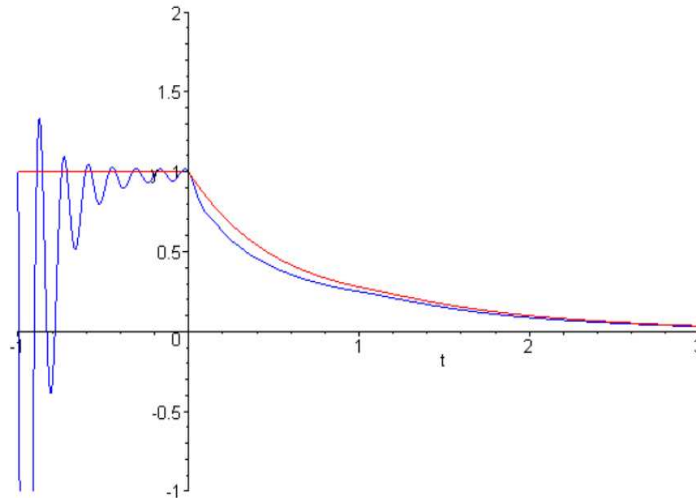


Figura 9: Gráfico de la implementación mediante autofunciones y su comparación con la respuesta obtenida según el método de pasos

Según se puede observar en el gráfico, la respuesta obtenida para $t > 0$ por este método (en azul) es muy similar a la que se obtuvo anteriormente mediante el método de pasos (en rojo). En el tramo correspondiente a la función historia (condiciones iniciales) entre -1 y 0, si bien la función implementada con las autofunciones verifica en los puntos t_i especificados que coincide con $\phi(t)$, fuera de estos puntos tiene grandes oscilaciones. Esto se debe a que los autovalores tienen parte real negativa, y entonces en el tramo donde t es negativo, quedan exponenciales que divergen.

Se realiza a continuación, un enfoque planteando consideraciones de energía, tomando como señal de entrada a la función historia, e imponiendo como condición, que el valor eficaz de la diferencia entre la respuesta y la excitación (en el intervalo correspondiente a la condición inicial), sea mínimo.

Formalmente, esto es:

$$\text{Minimizar: } \int_{-\tau}^0 [y(t) - \phi(t)]^2 dt, \quad \text{sujeto a } y(0) = \phi(0) \quad (22)$$

con

$$y(t) = \sum_{i=0}^N d_i e^{\alpha_i \cdot t} \cos(\beta_i \cdot t) \quad (23)$$

y

$$y(0) = \sum_{i=0}^N d_i \quad (24)$$

Para resolver el problema, planteamos el lagrangiano:

$$L = \int_{-\tau}^0 [y(t) - \phi(t)]^2 dt - \lambda \cdot [y(0) - \phi(0)]$$

y dado que la condición necesaria de primer orden es:

$$\nabla L = 0$$

entonces:

$$\frac{\partial L}{\partial d_i} = \int_{-\tau}^0 2[y(t) - \phi(t)] \cdot e^{\alpha_i \cdot t} \cos(\beta_i \cdot t) dt - \lambda = 0 \quad \forall i = 0..N$$

y

$$\sum_{i=0}^N d_i = \phi(0)$$

definiendo

$$\gamma_i(t) = e^{\alpha_i \cdot t} \cos(\beta_i \cdot t)$$

entonces la expresión anterior es:

$$\frac{\partial L}{\partial d_i} = \int_{-\tau}^0 2[y(t) - \phi(t)] \cdot \gamma_i(t) dt - \lambda = 0 \quad \forall i = 0..N$$

implica

$$\frac{\partial L}{\partial d_i} = \int_{-\tau}^0 \sum_{j=0}^N 2\gamma_j(t) \cdot \gamma_i(t) \cdot d_j dt - \int_{-\tau}^0 2\gamma_i(t) \phi(t) dt - \lambda = 0 \quad \forall i = 0..N$$

por lo tanto:

$$\sum_{j=0}^N \left[\int_{-\tau}^0 2\gamma_j(t) \cdot \gamma_i(t) \cdot dt \right] d_j - \left[\int_{-\tau}^0 2\gamma_i(t) \phi(t) dt \right] - \lambda = 0 \quad \forall i = 0..N$$

entonces, definiendo:

$$c_{ij} = \int_{-\tau}^0 2\gamma_j(t) \cdot \gamma_i(t) \cdot dt \quad \forall i = 0..N \quad \forall j = 0..N$$

$$indp_i = \int_{-\tau}^0 2\gamma_i(t) \phi(t) dt \quad \forall i = 0..N$$

la condición necesaria para la existencia de puntos estacionarios, es:

$$\sum_{j=0}^N c_{ij} d_j - indp_i - \lambda = 0 \quad \forall i = 0..N$$

y

$$\sum_{i=0}^N d_i = \phi(0)$$

las últimas dos ecuaciones conducen al sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{00}d_0 + c_{01}d_1 + c_{02}d_2 + \dots + c_{0N}d_N - indp_0 - \lambda = 0 \\ c_{10}d_0 + c_{11}d_1 + c_{12}d_2 + \dots + c_{1N}d_N - indp_1 - \lambda = 0 \\ c_{20}d_0 + c_{21}d_1 + c_{22}d_2 + \dots + c_{2N}d_N - indp_2 - \lambda = 0 \\ c_{30}d_0 + c_{31}d_1 + c_{32}d_2 + \dots + c_{3N}d_N - indp_3 - \lambda = 0 \\ \dots \\ c_{N0}d_0 + c_{N1}d_1 + c_{N2}d_2 + \dots + c_{NN}d_N - indp_N - \lambda = 0 \\ d_0 + d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_N = \phi(0) \end{array} \right. \quad (25)$$

y si se definen:

$$P = \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} & \dots & c_{0N} & -1 \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1N} & -1 \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2N} & -1 \\ c_{30} & c_{31} & c_{32} & \dots & c_{3N} & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{N0} & c_{N1} & c_{N2} & \dots & c_{NN} & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Indp = \begin{bmatrix} indp_0 \\ indp_1 \\ indp_2 \\ indp_3 \\ \dots \\ indp_N \\ 1 \end{bmatrix} \quad y \quad D = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \dots \\ d_N \\ \lambda \end{bmatrix}$$

entonces el sistema (25) se puede escribir matricialmente como:

$$P \cdot D = Indp$$

resolviendo el sistema (25), se obtiene entonces la matriz D cuyos elementos son los escalares adecuados para implementar la respuesta temporal $y(t)$ mediante las autofunciones.

Se muestra a continuación, la resolución mediante este enfoque, aplicada al caso práctico anterior.

```
cuadr := (aa, bb) -> int (exp (2*aa*t) * (cos (bb*t) ) ^2, t=-tau..0) ;
```

$$cuadr := (aa, bb) \rightarrow \int_{-\tau}^0 e^{(2aa t)} \cos^2(bb t) dt$$

```
cruzad := (aa1, bb1, aa2, bb2) -> Int (2*exp (aa1*t) * (cos (bb1*t) ) *exp (aa2*t) *
(cos (bb2*t) ) , t=-tau..0) ;
```

$$cruzad := (aa1, bb1, aa2, bb2) \rightarrow \int_{-\tau}^0 2 e^{(aa1 t)} \cos(bb1 t) e^{(aa2 t)} \cos(bb2 t) dt$$

```
linea := (aa, bb) -> int (2*c*exp (aa*t) * (cos (bb*t) ) , t=-tau..0) ;
```

$$linea := (aa, bb) \rightarrow \int_{-\tau}^0 2 c e^{(aa t)} \cos(bb t) dt$$

```
N:=5;
```

```
N:=5
```

Figura 10: Funciones para la obtención de los coeficientes

```
for i from 0 to N do P[i+1,i+1]:=2*cuadr(alpha[i],beta[i]) end do;
```

$$P_{1,1} := 6.813104782$$

$$P_{2,2} := 31.81076902$$

$$P_{3,3} := 152.8290352$$

$$P_{4,4} := 340.0556242$$

$$P_{5,5} := 588.4114420$$

$$P_{6,6} := 895.1036972$$

Figura 11: Obtención de los elementos de la diagonal de P

```

for i from 0 to N do for j from 0 to N do if (i<>j) then
P[i+1,j+1]:=evalf(cruzad(alpha[i],beta[i],alpha[j],beta[j])) end if
end do; end do;
for i from 0 to N do P[i+1,N+2]:=-1 end do;
      P1,7 := -1
      P2,7 := -1
      P3,7 := -1
      P4,7 := -1
      P5,7 := -1
      P6,7 := -1
for j from 1 to N+1 do P[N+2,j]:=1; end do;
      P7,1 := 1
      P7,2 := 1
      P7,3 := 1
      P7,4 := 1
      P7,5 := 1
      P7,6 := 1

```

Figura 12: Fila y columna adicional, relacionadas con la restricción, para la matriz P

```

for i from 0 to N do indp[i+1,1]:=linea(alpha[i],beta[i]) end do;
      indp1,1 := 3.535675459
      indp2,1 := -5.056056158
      indp3,1 := -5.731552975
      indp4,1 := -5.872749998
      indp5,1 := -5.925125632
      indp6,1 := -5.950380140
indp[N+2,1]:=1;
      indp7,1 := 1

```

Figura 13: Elementos correspondientes a los términos independientes del sistema

```

> evalm(indp) ;
      [ 3.535675459
      -5.056056158
      -5.731552975
      -5.872749998
      -5.925125632
      -5.950380140
      1
      ]

> evalm(P) ;
[6.813104782 , -11.76618519 , -15.47774441 , -16.33869768 , -16.66317287 , -16.81982022 , -1]
[-11.76618519 , 31.81076902 , 33.28296156 , 23.01631427 , 18.23184153 , 15.84314219 , -1]
[-15.47774441 , 33.28296156 , 152.8290352 , 135.2505650 , 88.33314043 , 64.64706677 , -1]
[-16.33869768 , 23.01631427 , 135.2505650 , 340.0556242 , 285.4261797 , 179.6751374 , -1]
[-16.66317287 , 18.23184153 , 88.33314043 , 285.4261797 , 588.4114420 , 483.1639459 , -1]
[-16.81982022 , 15.84314219 , 64.64706677 , 179.6751374 , 483.1639459 , 895.1036972 , -1]
[1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 0]

```

Figura 14: Matriz de los términos independientes y matriz de los coeficientes del sistema

```

matrizEscalares2:=evalm(inverse(P) &*indp) ;
      [ .8387420627
      .1391562842
      .009712661255
      .006751254319
      .001817265251
      .003820472145
      .1862456364
      ]

matrizEscalares2 :=

```

Figura 15: Matriz de los escalares solución del sistema

```
xxxx := (t) -> sum(matrizEscalaes2[i+1,1]*exp(alpha[i]*t)*cos(beta[i]*t),i=0..N);
```

$$.xxxx := t \rightarrow \sum_{i=0}^N \text{matrizEscalaes2}_{i+1,1} e^{(\alpha_i t)} \cos(\beta_i t)$$

```
plot({x_pasos(t),xx(t),xxxx(t)},t=-tau..3*tau,y=-1..2,numpoints=2000,color=[red,blue]);
```

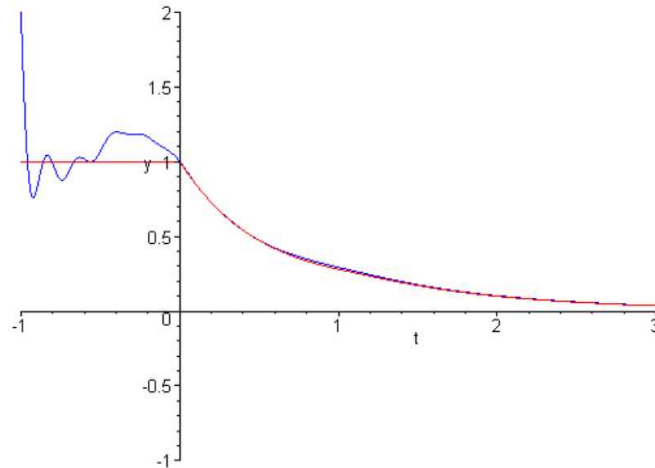


Figura 16: Gráfico de la implementación mediante autofunciones (con condición inicial basada en la energía) y su comparación con la respuesta obtenida según el método de pasos

Según se observa en la figura anterior, utilizando el criterio de minimizar el valor eficaz, disminuye la oscilación en la zona correspondiente a la función historia, y a su vez, para $t > 0$, la respuesta temporal coincide con la obtenida por el método de pasos.

Otro modo de resolver el problema planteado, consiste en utilizar derivadas parciales para extraer los coeficientes del lagrangiano, y con esto construir las ecuaciones correspondientes a las componentes del gradiente de L , para finalmente aplicar un solver.

La implementación de este procedimiento es el siguiente:

> $y := (t) \rightarrow \sum_{i=0}^5 d[i] * \exp(\alpha[i]*t) * \cos(\beta[i]*t), i=0..5;$

$$y = t \rightarrow \sum_{i=0}^5 d_i e^{\alpha_i t} \cos(\beta_i t)$$

> $L := \text{expand}(\text{Int}(((y(t)-1))^2, t=-\tau..0) - \lambda * (y(0)-1));$

$$L = \int_{-1}^0 \left[1 + 2 d_0 e^{(-1.048693409 t)} d_5 e^{(-4.495329916 t)} \cos(29.76148158 t) \right. \\ + 2 d_1 e^{(-2.628754231 t)} \cos(4.575836612 t) d_2 e^{(-3.492964474 t)} \cos(10.85894381 t) + d_1^2 (e^{(-2.628754231 t)})^2 \cos(4.575836612 t)^2 \\ + 2 d_1 e^{(-2.628754231 t)} \cos(4.575836612 t) d_4 e^{(-4.258775551 t)} \cos(23.46598311 t) \\ + 2 d_1 e^{(-2.628754231 t)} \cos(4.575836612 t) d_3 e^{(-3.947926773 t)} \cos(17.16576553 t) \\ + 2 d_2 e^{(-3.492964474 t)} \cos(10.85894381 t) d_3 e^{(-3.947926773 t)} \cos(17.16576553 t) \\ + 2 d_1 e^{(-2.628754231 t)} \cos(4.575836612 t) d_5 e^{(-4.495329916 t)} \cos(29.76148158 t) \\ + 2 d_3 e^{(-3.947926773 t)} \cos(17.16576553 t) d_5 e^{(-4.495329916 t)} \cos(29.76148158 t) \\ + 2 d_3 e^{(-3.947926773 t)} \cos(17.16576553 t) d_4 e^{(-4.258775551 t)} \cos(23.46598311 t) \\ + 2 d_2 e^{(-3.492964474 t)} \cos(10.85894381 t) d_5 e^{(-4.495329916 t)} \cos(29.76148158 t) \\ + 2 d_2 e^{(-3.492964474 t)} \cos(10.85894381 t) d_4 e^{(-4.258775551 t)} \cos(23.46598311 t) + d_2^2 (e^{(-3.492964474 t)})^2 \cos(10.85894381 t)^2 \\ + 2 d_4 e^{(-4.258775551 t)} \cos(23.46598311 t) d_5 e^{(-4.495329916 t)} \cos(29.76148158 t) + d_3^2 (e^{(-3.947926773 t)})^2 \cos(17.16576553 t)^2 \\ + d_4^2 (e^{(-4.258775551 t)})^2 \cos(23.46598311 t)^2 + d_5^2 (e^{(-4.495329916 t)})^2 \cos(29.76148158 t)^2 \\ - 2 d_1 e^{(-2.628754231 t)} \cos(4.575836612 t) - 2 d_5 e^{(-4.495329916 t)} \cos(29.76148158 t) - 2 d_4 e^{(-4.258775551 t)} \cos(23.46598311 t) \\ - 2 d_2 e^{(-3.492964474 t)} \cos(10.85894381 t) - 2 d_3 e^{(-3.947926773 t)} \cos(17.16576553 t) - 2 d_0 e^{(-1.048693409 t)} \\ + d_0^2 (e^{(-1.048693409 t)})^2 + 2 d_0 e^{(-1.048693409 t)} d_4 e^{(-4.258775551 t)} \cos(23.46598311 t) \\ + 2 d_0 e^{(-1.048693409 t)} d_2 e^{(-3.492964474 t)} \cos(10.85894381 t) + 2 d_0 e^{(-1.048693409 t)} d_3 e^{(-3.947926773 t)} \cos(17.16576553 t) \\ + 2 d_0 e^{(-1.048693409 t)} d_1 e^{(-2.628754231 t)} \cos(4.575836612 t) dt - \lambda d_0 - \lambda d_1 - \lambda d_2 - \lambda d_3 - \lambda d_4 - \lambda d_5 + \lambda$$

Figura 17: Planteo del problema considerando minimización del valor eficaz

El lagrangiano que hemos planteado, es una expresión de segundo grado en varias variables. Cuando calculemos (para buscar puntos estacionarios) su gradiente, sus componentes van a ser todas expresiones lineales con un término independiente. Entonces si en cada una de las componentes del gradiente, es decir, para cada derivada parcial del lagrangiano, tomamos a su vez la derivada parcial con respecto a cada variable, tendremos los coeficientes de las

ecuaciones del sistema lineal que debemos resolver, y a su vez, los términos independientes se pueden obtener igualando a cero todas las variables en cada componente del gradiente de L, y evaluando dicha componente en ese caso.

Finalmente, se obtienen los escalares que minimizan el valor eficaz, aplicando solve a la conjunción de las ecuaciones obtenidas, junto con la ecuación de restricción.

Se muestra el código correspondiente a la generación de los términos independientes, la construcción de las ecuaciones y la aplicación del solver:

```
for i from 0 by 1 to 5 do
indep[i]:=evalf(subs(d[0]=0,d[1]=0,d[2]=0,d[3]=0,d[4]=0,d[5]=0,lambda=0,diff(L,d[i]))) end do;
indep0 = -3.535675459
indep1 = 5.056056157
indep2 = 5.731552976
indep3 = 5.872749998
indep4 = 5.925125633
indep5 = 5.950380140
```

Figura 18: Términos independientes

```
> for i from 0 to 5 do
eq[i]:=evalf(diff(L,d[i],d[0]))*d[0]+evalf(diff(L,d[i],d[1]))*d[1]+evalf(diff(L,d[i],d[2]))*d[2]+
evalf(diff(L,d[i],d[3]))*d[3]+evalf(diff(L,d[i],d[4]))*d[4]+evalf(diff(L,d[i],d[5]))*d[5]+indep[i]
]-lambda; end do;
eq0 = 6.813104784 d0 - 11.76618519 d1 - 15.47774441 d2 - 16.33869768 d3 - 16.66317287 d4 - 16.81982022 d5 - 3.535675459 - λ
eq1 = -11.76618519 d0 + 31.81076902 d1 + 33.28296156 d2 + 23.01631427 d3 + 18.23184153 d4 + 15.84314219 d5 + 5.056056157 - λ
eq2 = -15.47774441 d0 + 33.28296156 d1 + 152.8290353 d2 + 135.2505650 d3 + 88.33314043 d4 + 64.64706677 d5 + 5.731552976 - λ
eq3 = -16.33869768 d0 + 23.01631427 d1 + 135.2505650 d2 + 340.0556244 d3 + 285.4261797 d4 + 179.6751374 d5 + 5.872749998 - λ
eq4 = -16.66317287 d0 + 18.23184153 d1 + 88.33314043 d2 + 285.4261797 d3 + 588.4114421 d4 + 483.1639459 d5 + 5.925125633 - λ
eq5 = -16.81982022 d0 + 15.84314219 d1 + 64.64706677 d2 + 179.6751374 d3 + 483.1639459 d4 + 895.1036973 d5 + 5.950380140 - λ
>
> i:='i';
i:=i
> escalares:=solve({eq[0],eq[1],eq[2],eq[3],eq[4],eq[5],diff(L,lambda)});
escalares:=
{d2 = .009712661205, λ = .1862456375, d0 = .8387420627, d3 = .006751254333, d5 = .003820472150, d1 = .1391562844, d4 = .001817265249}
> xx:=(t)->subs(escalares,y(t));
xx:=t → subs(escalares,y(t))
```

Figura 19: Aplicación del solver para la obtención de los escalares óptimos

De este modo, el solver devuelve los escalares adecuados y con ellos se implementa la función $xx(t)$.

La gráfica de la función obtenida es:

```
plot({x_pasos(t),xx(t)},t=-tau..3*tau,y=-1..2,numpoints=2000,color=[red,blue]);
```

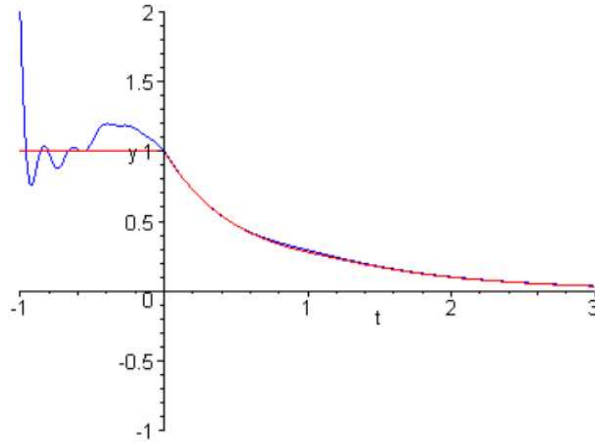


Figura 20: Gráfico de la respuesta temporal mediante autofunciones y comparación con método de pasos

Según se observa la misma respuesta temporal coincide exactamente con la que se obtuvo anteriormente.

4. Aplicación de las EDR: Caso práctico II

Para que un sistema descrito por una EDO genere una respuesta oscilatoria, es necesario que sea al menos de segundo orden.

Si se considera ahora una EDR de primer orden como la planteada originalmente, pero ahora con los parámetros:

$$a = 0, b = -1,3, c = 1, \tau = 1$$

y la función historia $\phi(t) = 1$ en $[-1; 0]$

entonces la EDR (12)

$$x'(t) = ax(t) + b x(t - \tau) \quad \forall t \geq -\tau, \text{ con } x(t) = \phi(t) \quad \forall t \in [-\tau; 0]$$

resulta:

$$x'(t) = -1,3 x(t-1) \quad \forall t \geq -1, \text{ con } x(t) = 1 \quad \forall t \in [-1; 0] \quad (26)$$

Para el caso particular en que $a = 0$, si se aplica el método de pasos explicado anteriormente de manera recursiva, se obtiene la siguiente expresión:

$$x(t) = \sum_{k=0}^n \frac{b^k (t - (k-1)\tau)^k}{k!} \quad \forall t \in [n\tau; (n+1)\tau] \quad (27)$$

entonces, para el caso particular planteado es:

$$x(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1,3)^k (t - k + 1)^k}{k!} \quad \forall t \in [n; n+1] \quad (28)$$

Por otra parte, según se mostró previamente, la ecuación característica asociada a la EDR es:

$$r = a + be^{-\tau r}$$

y aplicado a este caso particular, resulta:

$$r = -1,3 e^{-r} \quad (29)$$

En el gráfico siguiente se pueden ver los lugares geométricos de los puntos que verifican la igualdad de las partes real e imaginaria correspondientes a la ecuación anterior:


```
with(plots):
```

```
implicitplot({alpha=a+b*exp(-alpha*tau)*cos(beta*tau),beta=-b*exp(-alpha*tau)*sin(beta*tau)},alpha=-5..2,beta=-26..26,numpoints=8000,axes=frame);
```

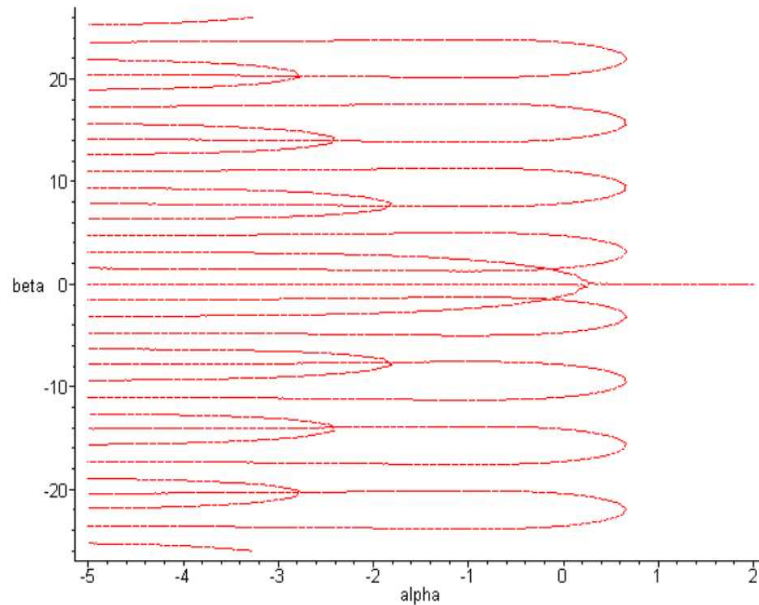


Figura 21: Lugar geométrico en el campo complejo, para los puntos que verifican cada una de las dos ecuaciones trascendentes

Mediante el uso de un solver, se pueden encontrar algunos de los valores que verifican el sistema de ecuaciones trascendentes, para obtener de este modo, un subconjunto de autovalores de la ecuación característica.

También se construye, a partir del método de pasos, la expresión y el gráfico para la respuesta temporal $x(t)$.

```

for delta from 0 by 1 to 9 do
solucion:=fsolve({alpha=a+b*exp(-alpha*tau)*cos(beta*tau),beta=-b*exp(-alpha*tau)*sin(beta*tau)},{alpha,beta},{beta=0+delta*2*Pi..(delta+1)*2*Pi}); resultado[delta]:=solucion; end do;

solucion := {beta = 1.480475016, alpha = -1.1340832564}
resultado_0 := {beta = 1.480475016, alpha = -1.1340832564}
solucion := {beta = 7.622616807, alpha = -1.795762551}
resultado_1 := {beta = 7.622616807, alpha = -1.795762551}
solucion := {beta = 13.96778327, alpha = -2.388803758}
resultado_2 := {beta = 13.96778327, alpha = -2.388803758}
solucion := {alpha = -2.756681015, beta = 20.28528405}
resultado_3 := {alpha = -2.756681015, beta = 20.28528405}
solucion := {alpha = -3.024609196, beta = 26.59027567}
resultado_4 := {alpha = -3.024609196, beta = 26.59027567}
solucion := {beta = 32.88865863, alpha = -3.235579635}
resultado_5 := {beta = 32.88865863, alpha = -3.235579635}
solucion := {beta = 39.18310837, alpha = -3.409653323}
resultado_6 := {beta = 39.18310837, alpha = -3.409653323}
solucion := {alpha = -3.557850013, beta = 45.47501506}
resultado_7 := {alpha = -3.557850013, beta = 45.47501506}
solucion := {alpha = -3.686883336, beta = 51.76517562}
resultado_8 := {alpha = -3.686883336, beta = 51.76517562}
solucion := {alpha = -3.801149722, beta = 58.05408141}
resultado_9 := {alpha = -3.801149722, beta = 58.05408141}

```

Figura 22: Subconjunto de soluciones del sistema de ecuaciones trascendentes

```
for delta from 0 by 1 to 9 do z[delta]:=alfa[delta]+I*beta[delta]
end do;
```

$$\begin{aligned}
z_0 &:= -1.1340832564 + 1.480475016 I \\
z_1 &:= -1.795762551 + 7.622616807 I \\
z_2 &:= -2.388803758 + 13.96778327 I \\
z_3 &:= -2.756681015 + 20.28528405 I \\
z_4 &:= -3.024609196 + 26.59027567 I \\
z_5 &:= -3.235579635 + 32.88865863 I \\
z_6 &:= -3.409653323 + 39.18310837 I \\
z_7 &:= -3.557850013 + 45.47501506 I \\
z_8 &:= -3.686883336 + 51.76517562 I \\
z_9 &:= -3.801149722 + 58.05408141 I
\end{aligned}$$

Figura 23: Soluciones complejas z_n

```
x_pasos := (t) -> sum(b^k*(t-(k-1)*tau)^k/k!, k=0..n);
```

$$x_pasos := t \rightarrow \sum_{k=0}^n \frac{b^k (t - (k-1)\tau)^k}{k!}$$

```
x_pasos(t);
```

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1.300000000)^k (t - 1. k + 1.)^k}{k!}$$

```
f := (t) -> piecewise(t < 0, c, t >= 0, subs(n = trunc(t/tau) + 1, x_pasos(t)));
```

$$f := t \rightarrow \text{piecewise}\left(t < 0, c, 0 \leq t, \text{subs}\left(n = \text{trunc}\left(\frac{t}{\tau}\right) + 1, x_pasos(t)\right)\right)$$

Figura 24: Expresión de la solución de la EDR, mediante el método de pasos

```
plot({f(t)},t=-1..30);
```

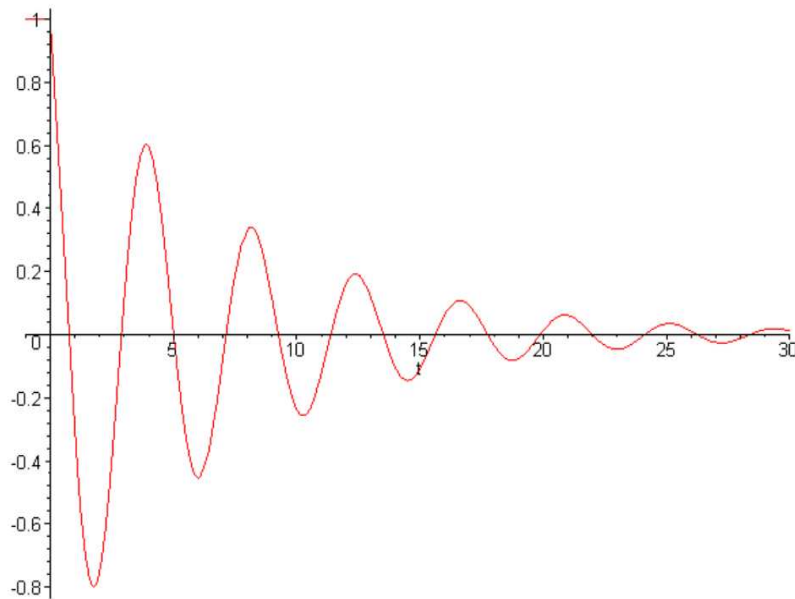


Figura 25: Gráfico de la respuesta temporal $x(t)$

Según se observa en el gráfico, aún cuando se trata de un sistema de primer orden, la respuesta temporal es de carácter oscilatorio.

5. Resultados y conclusiones

Las EDR representan un ámbito sumamente interesante para explorar, pues modelizan de un modo más riguroso muchas situaciones del mundo real en donde no se puede ignorar la existencia de retardos en la transferencia de información, y tal como hemos visto, esto puede cambiar drásticamente el comportamiento de un sistema frente a la alternativa de no tener en cuenta la existencia dicho retardo.

Podemos ver, además, que tienen particularidades especiales si las contrastamos con las EDO, pues como vimos a modo de ejemplo en el segundo caso práctico, a pesar de tratarse de un sistema de primer orden, en una EDR puede, aún así, existir un comportamiento oscilatorio.

Vale la pena observar que en el primer ejemplo dentro de los autovalores, hay un autovalor real, mientras que en el segundo caso práctico, todos los autovalores son complejos con parte imaginaria no nula. Y justamente, en el primer caso la respuesta fue no oscilatoria, mientras que en el segundo ejemplo $x(t)$ presentaba oscilaciones.

También, otra gran diferencia, es que las EDR tienen un espacio solución de autofunciones de dimensión infinita, y por ende requieren, no sólo la información de la función (y eventualmente sus derivadas) en un punto, sino que para encontrar la solución particular, es necesario contar con lo que se denomina la *función historia*.

El enfoque realizado mediante el desarrollo basado en autofunciones para aproximar a la

solución, es posible siempre que el sistema converja, pues de ese modo es razonable asumir que el error al truncar la serie de autofunciones (por tratarse de exponenciales negativas) estará acotado.

En el presente trabajo se pretendió llevar a cabo una introducción de las EDR, mostrando su existencia y explicando su utilidad, como una mejor modelización a ciertos problemas reales, señalando además las similitudes y diferencias de estas con respecto a las EDO. Se mostraron dos casos concretos y bien simples, para ejemplificar dos comportamientos bien diferenciados: uno de respuesta amortiguada sin oscilaciones, y el otro con una respuesta temporal oscilatoria. También se mostraron algunas estrategias para abordar la resolución de este tipo de ecuaciones diferenciales con retardo.

En un próximo trabajo, se buscará analizar en profundidad los distintos tipos de estructuras de las EDR, estudiar la relación existente entre los parámetros de la ecuación y los autovalores de la ecuación característica asociada, y además cómo se vinculan estos elementos con el comportamiento cualitativo de los sistemas descritos por EDR y caracterizar su estabilidad.

6. Referencias

Smith H. (2011) An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences. Texts in Applied Mathematics, vol 57. Springer, New York.

F. Murray and K. Miller (2007). Existence Theorems for Ordinary Differential Equations, 1ra. ed., New York.

Churchill, R. (2010). Variable compleja y aplicaciones. 5ta. ed. Madrid: MacGraw-Hill.

Bellman, R. and Cooke, K. (1963). Differential-Difference Equations. Academic Press, New York & London.

Fridman, E, (2014). Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control. 2014th ed. Birkhäuser.