C.E.M.A.

Virrey del Pino 3210
Belgrano R.
1426 Buenos Aires

TE. 552-3291/9313/7771

LA REGLA "GRAVAR EN FUNCION INVERSA A LA ELASTICIDAD" Y LA TRIBUTACION OPTIMA

Osvaldo H. Schenone

Octubre 1984

N° 46

LA REGLA "GRAVAR EN FUNCION INVERSA A LA ELASTICIDAD" Y LA TRIBUTACION OPTIMA.

por

Osvaldo H. Schenone
(C.E.M.A.)

SINTESIS

Este trabajo examina la regla clásica "Gravar en Función Inversa a la Elasticidad" y su corolario; "Si existe un bien cuya elasticidad de demanda sea nula, debe obtenerse la mayor fracción posible de la recaudación fiscal gravando sólo ese bien".

La insistencia en ciertos países en gravar fuertemente los combustibles argumentando que su demanda es relativamente inelástica, dado el parque automotriz existente, quizás sea una aplicación de esta regla clásica. En el presupuesto argentino para 1984, por ejemplo, el impuesto a los combustibles representa el 27.3% de los tributos recaudados por la Administración Nacional y el 3.88% del PBI, y su recaudación presupuestada duplica la suma de los impuestos a la importación y exportación.

En este trabajo se demuestra que la regla clásica en general no es óptima, se establece la condición bajo la cual sería óptimo concentrar la tributación en un solo bien, y se demuestra que esa condición no consiste en que la elasticidad de demanda sea cero.

1. Introducción.

El propósito de esta nota es reconsiderar el precepto clásico que:

> "La mejor manera de obtener una recaudación dada... es con un sistema de impuestos, bajo el cual las tasas se hacen progresivamente más altas a medida que pasamos de actividades de demanda u oferta muy elásticas a actividades donde la demanda u oferta son progresivamente menos elásticas"[1].

Un corolario de lo anterior es que podría llegar a ser óptimo obtener toda la recaudación gravando solamente a un bien, si éste tuviera una demanda u oferta completamente inelástica ya que el costo de bienestar sería nulo al no alterarse la cantidad consumida ni la asignación de recursos productivos.

Este resultado puede denominarse "Gravar en Función Inversa a la Elasticidad" y es intuitivamente muy atrayente, principalmente si se visualiza el costo de bienestar de los impuestos como los triángulos, bajo las curvas de demanda, de excedente del consumidor perdidos a causa de los impuestos. Claramente, estos triángulos serán menores cuanto menor sea la elasticidad de demanda por los bienes sujetos a impuestos, y de ahí lo atractivo de esta idea. Sin embargo, ésta ha sido considerada severamente en la literatura; por ejemplo Musgra-

---

1. A.C. Pigou, A Study in Public Finance, 3rd. Ed., (Macmillan, London, 1947), pág. 105.

ve, Prest y Atkinson y Stiglitz[2] critican su validez y los dos últimos autores, en particular, establecen que este resultado es válido si las elasticidades-precio cruzadas de todos los bienes gravables son nulas.

2. El Modelo.

Considere una economía perfectamente competitiva, con n bienes producidos a costos de oportunidad constantes. El fisco recauda un monto fijo en impuestos, R, independientemente del sistema tributario adoptado. Los consumidores maximizan una función de utilidad, sujeto a su restricción de presupuesto, dando lugar a las funciones de demanda por los n bienes $h_i(q,m)$ para $i=1,\dots,n$; donde q es el vector de precios brutos (o sea, $q_i = p_i/(1-T_i)$, donde p_i es el precio neto del bien i y T_i es la tasa del impuesto sobre el bien i como porcentaje del precio bruto) y m es el ingreso monetario. Si se denomina $v(q,m)$ a la función de utilidad indirecta, el sistema tributario óptimo consiste en el vector T que maximiza $v(q,m)$, sujeto a que $\sum_i T_i q_i h_i = R$.

Se ha demostrado[3] que este vector de impuestos óptimos es el que satisface:

---

2. Musgrave, The Theory of Public Finance (Mc Graw Hill, New York, 1959); A.R.Prest, Public Finance in Theory and Practice, 5th Ed.(Weidenfeld and Nicholson, London, 1975); A.B.Atkinson y J.E. Stiglitz, Lectures on Public Economics (Mc Graw Hill, New York, 1980).

3. Ver O.H.Schenone, C.A.Rodríguez y R.R.Mantel, "Complementariedad, Exenciones y Tributación Optima", Documento de Trabajo N°42, C.E.M.A. (Julio 1984).

1) $\eta T = \Theta e$,

donde η es la matriz de elasticidades precio compensadas de demanda por los n bienes en la economía, Θ es un escalar no positivo y e es un vector cuyos elementos son todos iguales a 1.

La ecuación (1) dice que los impuestos óptimos (o sea, los que ocasionan un costo de bienestar mínimo) son aquellos que inducen reducciones porcentuales por efecto sustitución idénticas en las cantidades demandadas de todos los bienes (e iguales a Θ). La razón que esta ecuación considera solamente el efecto sustitución de los impuestos es que el efecto ingreso atribuíble a una estructura impositiva en particular es nulo, ya que cualquiera fuera la estructura adoptada la recaudación fiscal sería la misma, R.

La interpretación del resultado que nos dá la ecuación (1) es la siguiente: la pérdida de bienestar debida a incentivos tributarios para alterar la composición óptima del consumo; es decir, sustituir en contra de los bienes más gravados y a favor de los menos gravados, será mínima si los impuestos aplicados inducen tales sustituciones de modo que desalientan por igual el consumo de todos los bienes.

<u>Caso 1</u>: <u>Todos los Bienes son Susceptibles de ser Gravados</u>.

La propiedad de homogeneidad de grado cero en precios relativos de las demandas compensadas implica que la matriz η, de orden nxn, es singular; es decir:

$$\sum_j \eta_{ij} = 0,$$

o sea,

2) $\eta e = 0$.

Dado que la matriz η incluye las elasticidades precio compensadas de todos los bienes en la economía, se puede escribir $\sum_i \alpha_i \eta_{ij} = 0$; o sea $\alpha^* \eta = 0$, donde α_i es la participación del bien i-esimo en el gasto total y α^* es el vector fila $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n)$. Premultiplicando la ecuación (1) por α^* y notando que $\alpha^* e = 1$ se obtiene:

$$0 = \alpha^* \eta T = \Theta \alpha^* e,$$

de donde $\Theta=0$, y consecuentemente la ecuación (1) queda:

3) $\eta T = 0$.

Multiplicando la igualdad (2) por un escalar X, dá:

$$X\eta e = 0,$$

de donde $T = Xe$ es una solución de la ecuación (3). Es decir, impuestos uniformes de 100 X % sobre todos los bienes son óptimos[4], independientemente de la elasticidad precio de demanda por cada uno de los bienes. Es decir, "Gravar en Función Inversa a la Elasticidad" no es óptimo cuando todos los bienes son susceptibles de ser gravados. Consecuentemente, tampoco será óptimo gravar un solo bien, aunque su demanda sea perfectamente inelásti

4. Para una demostración más completa de este resultado, ver O.H. Schenone, C.A.Rodríguez y R.R.Mantel, op.cit.

ca.

La interpretación de este resultado es la siguiente: Si se gravara solamente al bien cuya demanda es perfectamente inelástica (digamos que éste fuera el i-esimo bien, o sea $\eta_{ii} = 0$), en circunstancias que los efectos cruzados no son todos iguales a cero (o sea, $\eta_{ji} \neq 0$ para algún j), entonces se inducirán cambios en las *cantidades demandadas de algunos* bienes precisamente debido a estos efectos cruzados. Nos encontraríamos, entonces, con que la cantidad demandada de ciertos bienes no habrá variado (en particular, la cantidad demandada del i-esimo bien, el que tiene demanda perfectamente inelástica) mientras que la de otros bienes variará, como consecuencia del impuesto al bien de demanda perfectamente inelástica. Esta situación viola la condición de optimalidad, establecida en la ecuación (1), que como se recordará prescribe que las cantidades demandadas de todos los bienes experimenten la misma disminución porcentual.

En *síntesis, si todos los bienes son susceptibles de* ser gravados no es óptimo concentrar la tributación en un solo bien, aunque existiera uno con demanda perfectamente inelástica.

A continuación se considera el caso en que algunos bienes no son susceptibles de ser gravados para verificar si la regla "Gravar en Función Inversa a la Elasticidad" es óptima, para encontrar la condición (si existe) bajo la cual sea óptimo concentrar la tributación en un solo bien, y verificar si esta condición consiste en que la elasticidad de demanda por el bien gravado sea igual a cero.

Caso 2: Ciertos Bienes no son Susceptibles de ser Gravados.

En este caso sólo $k<n$ bienes son gravables. Debido al supuesto de costo marginal constante, la imposición de gravámenes a los k bienes gravables dejará inalterado el precio de cada bien no gravado en relación al de otros bienes no gravados. Consecuentemente, los bienes no gravables constituyen un bien compuesto en el sentido de Hicks, y pueden tratarse como un único bien.

Se define $\tilde{\eta}$ como una submatriz de orden kxk de la matriz η, que incluirá las elasticidades precio compensadas de demanda por los k bienes gravables. También se define σ como el vector de elasticidades cruzadas conpensadas de demanda por cada bien gravable respecto del precio del bien compuesto no gravable.

En este caso las ecuaciones (1) y (2) adoptan respectivamente las formas:

4) $\tilde{\eta}T = \Theta e.$

5) $\tilde{\eta}e = -\sigma$

La pregunta ahora es ¿bajo qué condición el vector de impuestos óptimos, definido por la ecuación (4), consistirá en gravar más a los bienes con demanda más inelástica?

Premultiplicando la ecuación (4) por $\tilde{\eta}^{-1}$ se obtiene:

6) $T = \Theta\eta^{-1}e.$

En la ecuación (6) se advierte que cada componente del vector de impuestos óptimos T, digamos T_i, depende en general de todas las elasticidades de demanda por el bien i-ésimo respecto de su propio precio y de los precios de los demás bienes. Consecuentemente, no es correcto que el impuesto óptimo sobre un bien es función inversa de su elasticidad de demanda, ignorando las elasticidades cruzadas.

Si acaso las elasticidades cruzadas fuesen todas cero, $\tilde{\eta}_{ij} = 0$ para $i \neq j$, entonces "Gravar en Función Inversa a la Elasticidad" será ciertamente óptimo, ya que $\tilde{\eta}^{-1}$ será una matriz diagonal cuyos elementos en la diagonal principal serán $\tilde{\eta}_{ii}^{-1}$ para $i=1,\ldots,k$. Por lo tanto los componentes del vector de impuestos óptimos T, digamos T_i, serán:

$$T_i = \frac{\Theta}{\tilde{\eta}_{ii}}, \quad i=1,\ldots,k.$$

Se puede concluir que "Gravar en Función Inversa a la Elasticidad" será óptimo si se cumplen los requisitos: A) Existen bienes no gravables y B) las elasticidades cruzadas de los bienes gravables son nulas. En tal caso sería óptimo concentrar la tributación en un solo bien, si éste tuviera una demanda perfectamente inelástica.

Conforme al principio de "Gravar en Función Inversa a la Elasticidad" si existiera algún bien con demanda perfectamente inelástica, éste sería el candidato a ser gravado con la mayor tasa, posiblemente hasta el extremo de proveer toda la recaudación fiscal a través de impuestos a este bien. La insistencia, en ciertos países, en gravar fuertemente los combustibles argumentando que su dema a es relativamente inelástica, dado el parque automotriz, quizás sea una aplicación de aquel principio clásico.

Habiendo establecido que si todos los bienes son gravables, entonces gravar un solo bien nunca es óptimo, corresponde examinar ahora la optimalidad de gravar un solo bien cuando ciertos bienes no son susceptibles de ser gravados y no se cumple que $\tilde{\eta}_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Suponga que solamente $k<n$ bienes pueden ser gravados. La pregunta es ¿bajo qué condiciones es óptimo gravar sólo uno de aquellos k bienes?[5] La respuesta es la siguiente: Será óptimo gravar solamente al bien j-esimo cuando $\tilde{\eta}_{jj} = \tilde{\eta}_{ij}$ $j \neq i = 1,\ldots,k$.

Es decir, será óptimo gravar solamente al bien j cuando la elasticidad compensada respecto de su propio precio sea igual a la elasticidad compensada de demanda por cada uno de los restantes $k-1$ bienes respecto del precio del bien j. La demostración de este resultado es la siguiente: Suponga que se elige al bien 1 como único bien gravado. Esta decisión será óptima si:

$$7)\ \tilde{\eta}_{11} = \tilde{\eta}_{21} = \ldots = \tilde{\eta}_{k1} = B,$$

reemplazando (7) en (2) se tiene que:

---

5. La respuesta del principio de "Gravar en Función Inversa a la Elasticidad" sería que la condición es que el bien gravado tenga una demanda perfectamente inelástica.

$$
8)\quad \begin{pmatrix} B & \tilde{\eta}_{12} & \cdots & \tilde{\eta}_{1k} \\ B & \tilde{\eta}_{22} & \cdots & \tilde{\eta}_{2k} \\ B & \tilde{\eta}_{32} & \cdots & \tilde{\eta}_{3k} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ B & \tilde{\eta}_{k2} & \cdots & \tilde{\eta}_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ T_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Theta \end{pmatrix}
$$

Aplicando la regla de Cramer a la ecuación (8) se obtiene:

$$
T_i = \frac{B\Theta \det \begin{pmatrix} 1 & \tilde{\eta}_{12} & \cdots & \tilde{\eta}_{1,i-1} & 1 & \tilde{\eta}_{1,i+1} & \cdots & \tilde{\eta}_{1,k} \\ \cdot & & & & \cdot & & & \\ \cdot & & & & \cdot & & & \\ \cdot & & & & \cdot & & & \\ 1 & \tilde{\eta}_{k2} & \cdots & \tilde{\eta}_{k,i-1} & 1 & \tilde{\eta}_{k,i+1} & \cdots & \tilde{\eta}_{kk} \end{pmatrix}}{B \det \begin{pmatrix} 1 & \tilde{\eta}_{12} & \cdots & \tilde{\eta}_{1k} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ 1 & \tilde{\eta}_{k2} & \cdots & \tilde{\eta}_{kk} \end{pmatrix}} = \begin{cases} = 0 & \text{si } i \neq 1 \\ = \frac{\Theta}{B} & \text{si } i = 1 \end{cases}
$$

El determinante del numerador es nulo por tener dos columnas iguales excepto que $i=1$, en cuyo caso el cociente de determinantes vale uno, y consecuentemente $T_1 = \frac{\Theta}{B} > 0$ mientras que $T_i = 0$ para $i \neq 1$.

La interpretación de este resultado es la siguiente: Si la elasticidad compensada de demanda de un bien (digamos el bien j) respecto de su propio precio es igual a las elasticidades compensadas de demanda de los restantes bienes gravables respecto del j-esimo precio, entonces un impuesto sobre el bien j inducirá idénticos cambios en las cantidades demandadas de todos los bienes gravables, satisfaciendo así la condición de optimalidad establecida en la ecuación (4).

3. Conclusiones.

Los principales resultados de este trabajo son los siguientes:

1) La regla "Gravar en Función Inversa a la Elasticidad" no es óptima si todos los bienes son susceptibles de ser gravados, ya que en este caso el sistema tributario óptimo consiste en impuestos a la <u>misma</u> tasa sobre todos los bienes.

2) Si existen bienes no gravables la regla "Gravar en Función Inversa a la Elasticidad" es óptima si los bienes gravables son todos independientes entre sí; es decir, no son ni complementarios ni sustitutos entre sí. En este caso, se puede dar el caso extremo en que resulte óptimo gravar un solo bien, si su elasticidad de demanda es cero.

3) Existe además otra condición bajo la cual es óptimo gravar un solo bien, cuando hay bienes no gravables y los gravables <u>no</u> son independientes entre sí. En estas circunstancias, si existe un bien Z cuya elasticidad compensada de demanda respecto de su propio precio sea igual a las elasticidades compensadas de demanda de cada uno de los demás bienes gravables respecto del precio de Z, entonces será óptimo gravar solamente al bien Z.

REFERENCIAS

Atkinson, A.B. y Stiglitz, J.E.: Lectures on Public Economics (Mc Graw Hill, New York, 1980).

Musgrave, R.: The Theory of Public Finance (Mc Graw Hill, New York, 1959).

Pigou, A.C.: A Study in Public Finance, 3rd. Ed. (Macmillan, London, 1947), pág. 105.

Prest, A.R.: Public Finance in Theory and Practice, 5th. Ed., (Weidenfeld and Nicholson, London, 1975).

Schenone, O.H., Rodríguez, C.A. y Mantel, R.R.: "Complementariedad, Exenciones y Tributación Optima", Documento de Trabajo N° 42, C.E.M.A. (Julio 1984).